

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapă locală – 21 februarie 2016

Filiera tehnologică: profilul tehnic

Clasa a XI-a

1. În reperul cartezian xOy se dau punctele $A_n(2n-2, n^2-n)$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine n pentru care punctele A_n au coordonatele egale.

b) Să se calculeze aria triunghiului $A_1A_2A_3$.

Soluție:

a)
$$\begin{aligned} 2n-2 &= n^2-n \\ n^2-3n+2 &= 0 \\ n &\in \{1; 2\} \end{aligned}$$

3p

b) Determinarea coordonatelor punctelor $A_1(0,0), A_2(2,2), A_3(4,6)$

Calculează aria triunghiului
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4, A_{\Delta A_1A_2A_3} = 2$$

4p

2. Fie matricea $A(x; y) = \begin{pmatrix} x-2015 & 1 & y \\ 2y-1 & x-2015 & 1 \\ 1 & y^2 & x-2015 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați ${}^tA(2013; -1) \cdot A(2014; 2)$.

b) Rezolvați ecuația $\det A(x; 1) = 0$.

Soluție:

a)
$${}^tA(2013; -1) \cdot A(2014; 2) = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -8 \\ -6 & 7 & -1 \\ 2 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

4p

b) $\det A(x; 1) = 0 \Rightarrow x = 2016, x = 2013$

3p

3. a) Calculați
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{6}}{x - 3}$$

b) Studiați dacă funcția $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x^2 + 1}{|x + 1|}$ are limită în $x_0 = -1$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$

Soluție:

a) Amplificarea cu expresia conjugată

1p

Descompunerea expresiei $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ și obținerea $\frac{5\sqrt{6}}{12}$

2p

b) Calculul limitelor laterale

1p

Funcția are limita ∞ în $x_0 = -1$

1p

c) Calculul limitei și obținerea rezultatului -2

2p

4. Găsiți valorile reale ale lui a și b pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(ax + 1 - \frac{2 - bx + x^2}{2x - 1} \right) = 2$.

Soluție:

Dacă $a \leq 0$ atunci limita ar fi $-\infty$, deci a trebuie să fie strict pozitiv.

După aducerea la același numitor limita devine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2(2a-1) + x(b+2-a) - 3}{2x-1} \right) = 2$$

$$2a-1=0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

4p

Pentru $a = \frac{1}{2}$ limita este de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ și are valoarea $\frac{b+\frac{3}{2}}{2}$.

Valoarea limitei este 2 pentru $b = \frac{5}{2}$.

3p